MAGYAR MÉRNÖKI
KAMARA
Gépészeti Tagozat

Új méretezési módszerek a gépészeti tervezésben I.

Végeselem-módszer alkalmazásának gyakorlata a gépészeti tervezésben

Dr. Oldal István

2015.

Magyar Mérnöki Kamara

Gépészeti Tagozat

Sorozat címe:

Új méretezési módszerek a gépészeti tervezésben

Kötet címe:

Végeselem-módszer alkalmazásának gyakorlata
a gépészeti tervezésben

Szerző:

Dr. Oldal István

Sorozat szerkesztője:

Dr. M. Csizmadia Béla

Készült az MMK Feladatalapú pályázatának keretében

29-2015/GT

2015

TARTALOM

1. Bevezetés, a segédlet célja

A gépészeti tervezésben ma már a végeselem-módszer a legelterjedtebb módszer szilárdsági ellenőrzésre. Elterjedésének oka, hogy az analitikus számítási eljárásoknál sokkal szélesebb körben alkalmazható, bonyolultabb problémákat is meg lehet oldani a segítéségével. A mai kereskedelmi szoftverek felhasználóbarát felülete könnyen használható, gyorsan megoldáshoz jutunk egy-egy probléma esetében. Az eljárás számos előnye mellett azonban – éppen a könnyű kezelhetőség miatt – az alkalmazásának megvannak a veszélyei is. Mivel ma már nem kell a végeselem-módszer mélyebb ismerete egy adott probléma megoldásához, így előfordul, hogy nem a megfelelő modellt alkalmazzuk a feladat valamelyik részletében, vagy az eredményeket nem úgy értékeljük, hogy figyelembe vesszük a választott modell korlátait. Sok esetben az iparban alkalmazott modellek hibásak, mert a felhasználók nem ismerik (fel) a használt modell korlátait vagy nem megfelelő modellt alkalmaznak.

A segédlet célja, hogy bemutassa (példák segítségével) a szilárdsági modellezés folyamatát a geometria meghatározásától az eredmények értékeléséig. A segédletnek nem célja a végeselem-módszer bemutatása, megtanítása, annak elsajátítására léteznek megfelelő tananyagok. A segédlet azok számára hasznos, akik ismerik a módszert, de nem rendelkeznek nagy tapasztalattal, így sok probléma kezelésére még nincsenek bevált eljárásaik. Reményeink szerint a tapasztalt szakemberek számára is szolgál néhány érdekes és hasznos információval.

2. Modellválasztás

Bármilyen számítási módszer esetében a modellválasztás alapvető fontosságú, hiszen hiába oldunk meg egy problémát jól, ha a valóságban egy másik problémával állunk szemben. (Hiába számoljuk ki, hogy 2 + 2 = 4, ha a valóságban 2 + 3 = ? a kérdés, csak nem jól modelleztük.) A végeselemes modellezés alkalmazásakor is az a célunk, hogy a lehető legegyszerűbb, de még elegendő pontosságú modellt válasszuk ki a feladat megoldásához. Ehhez egy jó egyensúlyt kell találnunk a rendelkezésre álló kapacitások és idő, valamint a szükséges pontosság közt.

2.1. Geometriai modellezés, egyszerűsítések szükségessége és lehetőségei

A számítógépes modellezés alapja a geometriai modell. Ez sosem egyezik meg a valós geometriával, mert például egy egyszerű henger esetében is különbözik egy elméleti, tökéletesen kör alakú és állandó átmérőjű modell a valóságban az adott gyártási módszer pontosságának megfelelő eltéréssel legyártott darabtól. Azonban a geometriai modellezéskor legtöbbször ennél sokkal nagyobb eltéréseket is alkalmazunk. Ezt tudatosan és tervezetten kell végrehajtani, a saját céljainknak megfelelően.

A geometriai modellezéskor két lehetőségünk van. Első esetben a valós test lehető legpontosabb mását igyekszünk numerikus formában rögzíteni. Ennek eredménye mindig 3D testmodell, ami modellezési problémát nem vet fel, hiszen ilyenkor a valóságot egy az egyben akarjuk lemásolni. Ekkor a modellezési kérdés az, hogy vannak-e elhagyható, például egy terheletlen szerkezeti elemek amelyet kihagyhatunk a modellből. Második eset, amikor az eredeti geometria helyett annak valóban egyszerűsített modelljét alkalmazzuk.

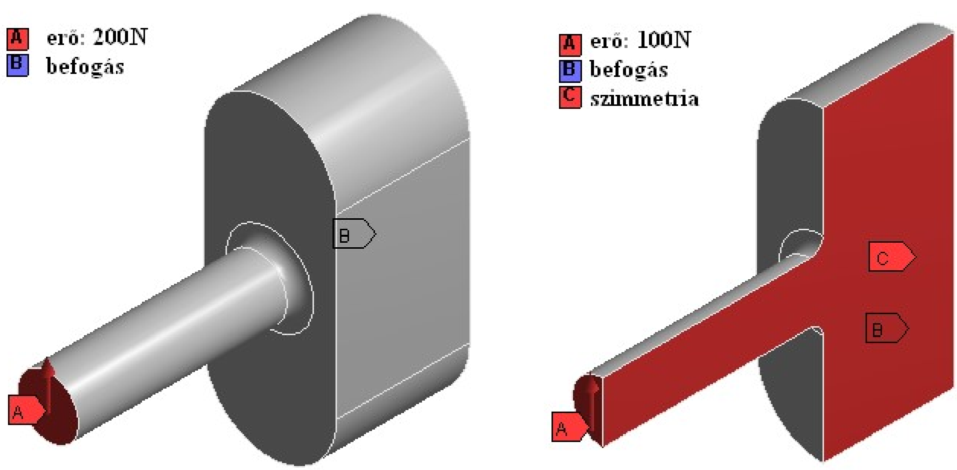
A véges elemek közt vannak 1, 2 és 3 dimenziós elemek. Ezek alkalmazása a választott geometriai modellel szoros kapcsolatban van, mert a majdani elemtípusnak megfelelő geometriai modellt kell készíteni. A valóság mindig 3D, de vannak esetek, amikor nem lehetséges vagy nem célszerű a modellezéskor is ezt használni.

A modell egyszerűsítésének célja minden esetben a feladat időigényének csökkentése. A feladat időigényét két irányból is csökkenthetjük, az egyik maga a geometriai modell létrehozásának munkaidő igénye, a másik a kész modell esetében a számítási idő csökkentése. Ha csak a számítási időt tekintjük, akkor is sokszor találkozunk azzal a problémával, hogy a megfelelően hálózott 3D modell számítási igénye túl nagy, napok, hetek, hónapokban mérhető, és nem áll a rendelkezésünkre ennyi. Ilyenkor az egyik lehetőségünk a geometriai egyszerűsítés. Geometriai egyszerűsítésekre a következő lehetőségeink vannak:

- szimmetria, periodikus tulajdonság modellezése,
- dimenzió csökkentése.

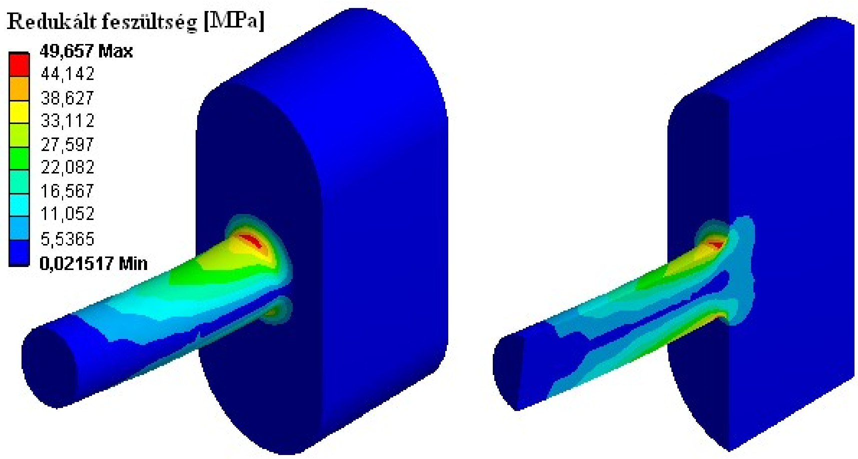
2.1.1. Szimmetria modellezése

Ha a vizsgált alkatrész vagy szerkezet szimmetrikus, érdemes elgondolkodni, hogy a szimmetriát kihasználva egyszerűsítsük a modellt. Természetesen nem mindig érdemes ezt az egyszerűsítést elvégezni. Ha a számítási idő nem hosszú, akkor nem biztos, hogy megtérül a többlet előkészítésbe fektetett idő.



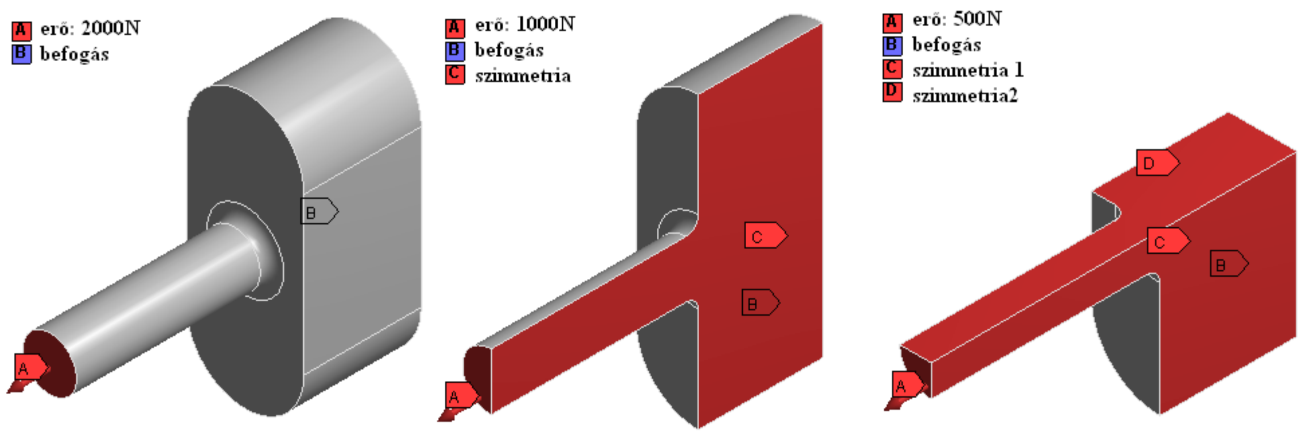
2.1. ábra: Szimmetria modellezése

Ha a **test és a terhelés is szimmetrikus**, akkor ennek kihasználásával elegendő a test egyik felét modellezni és a szimmetriai sík elmozdulását megakadályozni a síkra merőleges irányban (2.1. ábra). A megfelelő modell esetében (a numerikus hibától eltekintve) ugyanazt az eredményt kapjuk (2.2. ábra).



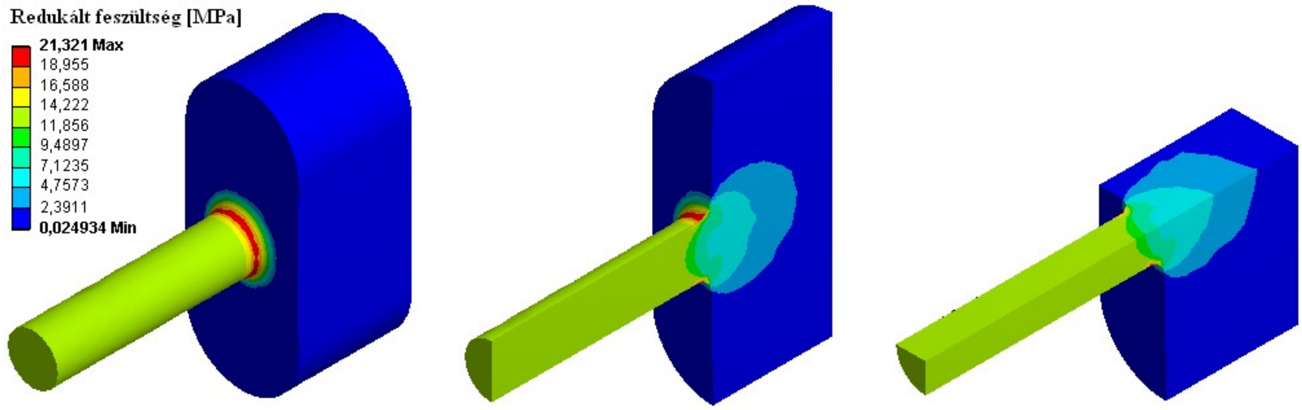
2.2. ábra: Redukált feszültségek a teljes és a fél modellen

A fenti esetben a test geometriája kétszeresen szimmetrikus, de a terhelés nem, így azt nem lehet kihasználni. Ha a terhelés is kétszeresen szimmetrikus, akkor a kettős szimmetria kihasználásával tovább egyszerűsíthető a modell, elegendő a negyede. (2.3. ábra)



2.3. ábra: Szimmetria és kettős szimmetria modellezése

A modellezés ebben az esetben mindegyik modell esetében megfelelő, ha a peremfeltételeket a modelleknek megfelelően beállítottuk, az eredményeink jól leírják a valóságos folyamatot. (2.4. ábra)



2.4. ábra: Redukált feszültségek a teljes, a fél és a negyed modellen

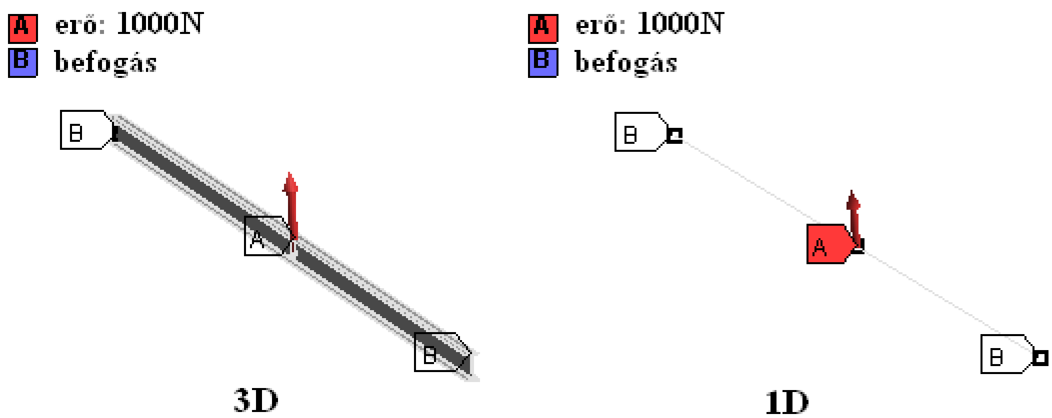
A szimmetria kihasználásának, mint egyszerűsítésnek az a jó tulajdonsága, hogy semmilyen elhanyagolást nem teszünk, teljes értékű megoldást kapunk vele. Ezen kívül bizonyos nemlineáris alkalmazások esetében, ahol a számítási igény felezése is nagy előny, további előnye, hogy a szimmetrikus tulajdonság stabilizálja a modellt, és gyorsabb konvergenciát eredményez. Ennek oka az, hogy míg az eredeti modellen a számításban minden csomópont minden elmozdulása ismeretlen, addig a szimmetrikus modell szimmetria síkjában a síkra merőleges elmozdulás értéke a teljes síkon ismert.

2.1.2. 1D, 2D, 3D modellek

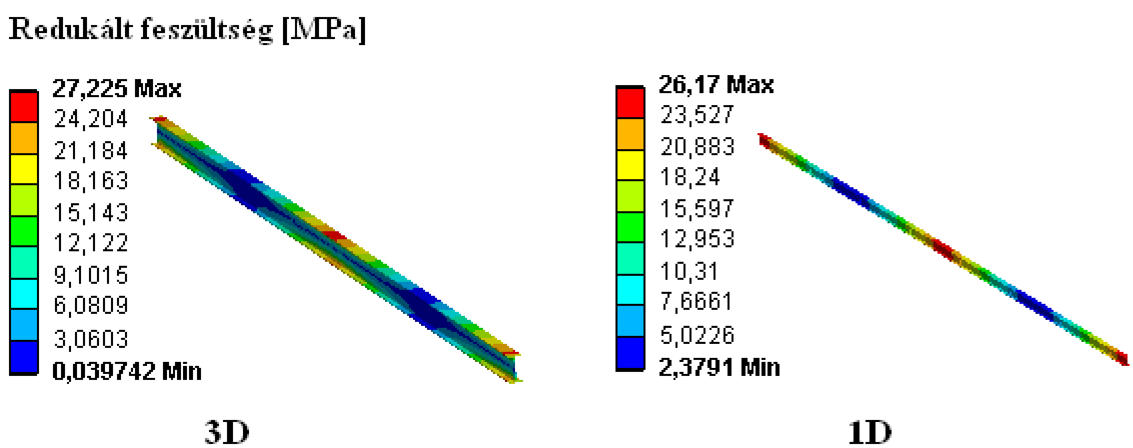
Állandó keresztmetszetű tartók esetében lehetőségünk van a geometria egyszerűsítésére. A rúd vagy gerenda elemek alkalmazásával nem szükséges a teljes geometriát megrajzolni, modellezni, elegendő a keresztmetszetek középvonalát megrajzolni és 1D vonalelemekkel modellezni. Ezek nagyon nagy előnye a gyorsaság és a kis számítási igény. Mivel a szerkezetet középvonalával modellezzük, így a rajzoláskor nem szükséges a keresztmetszetek és csatlakozó felületek, áthatások megrajzolása. Természetesen így azok hatásait sem fogja a modell számítani, így a sarkok, hegesztések, feszültséggyűjtő helyek nem jelennek meg a modellben. Felmerülhet a kérdés, hogy akkor miért alkalmazzuk a vonalelemet, ha ennyi elhanyagolást kell elfogadnunk.

Két eset van, amikor nagyon hasznos, szinte megkerülhetetlen az alkalmazása. Egyik eset, amikor nagyon nagy szerkezeteket kell modelleznünk (híd, szárítótorony, siló, …). Ilyenkor a 3D modellt nem is biztos, hogy tudjuk használni, mert olyan nagy méretű és sok elemből álló modellt eredményez, ami akkora számítási igényt jelent, amit nem lehetséges a rendelkezésre álló idő alatt megoldani. A másik eset az előtervezés fázisa. Amikor nincs végleges szerkezetünk, és több szerkezeti megoldást, több geometriát kell megvizsgálni. Ilyenkor a testmodell megrajzolása is több napi munka, a modellezés szintén nagy számítási igényű. Minden módosítás esetén a geometriát újra kell rajzolni, kis módosítások estén is. Ha rúdmodellt használunk, akkor a rajzolás is sokkal kevesebb munkát jelent, a modellezés is kevesebb számítási igényű és a keresztmetszetek módosítása mindössze a paraméterek cseréjét jelenti. Ezzel a módszerrel az előtervezés munka és időráfordítása töredékére csökkenthető.

A következő példán két végén befogott, középen erővel terhelt tartót mutatunk be.



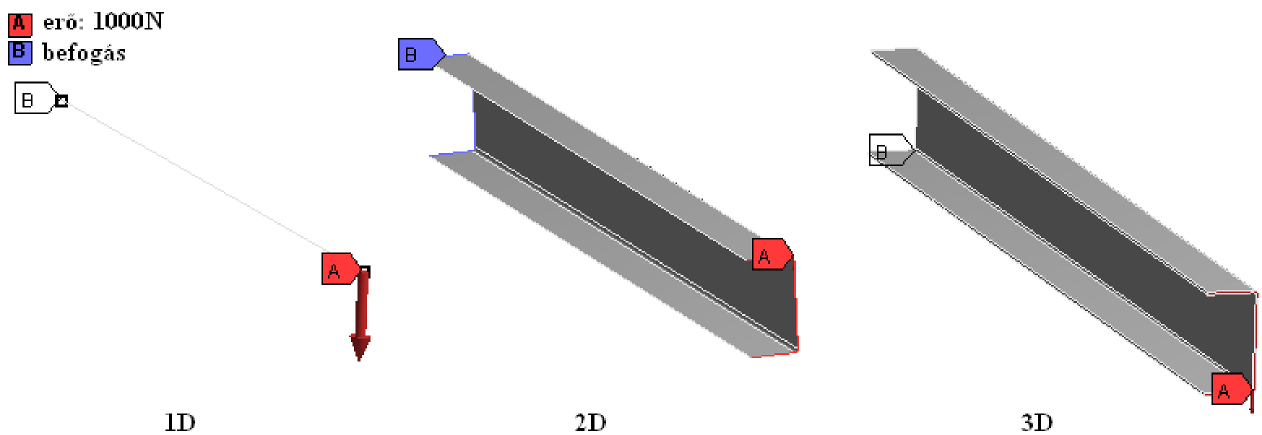
2.5. ábra: I-tartó 3D és 1D modellje



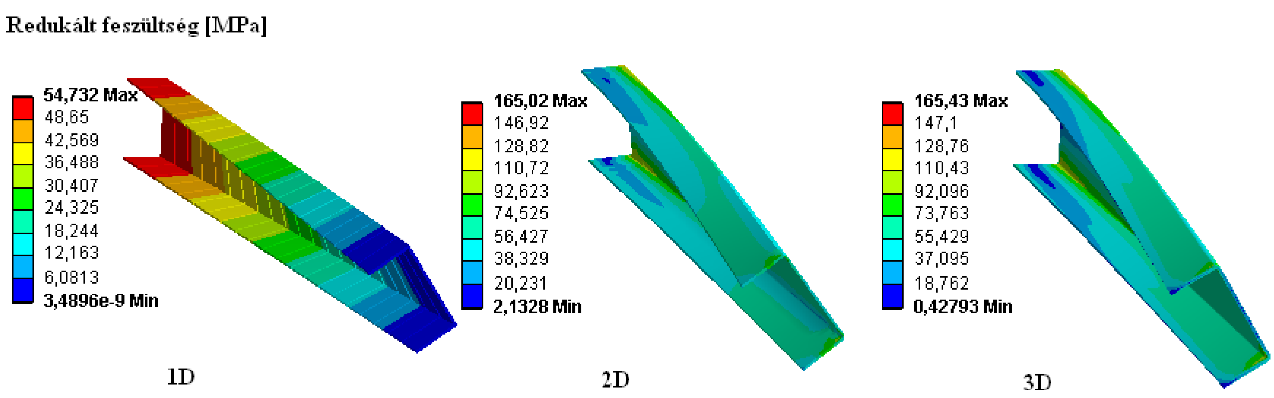
2.6. ábra: I-tartó 3D és 1D modelljével számított feszültségek

Az eltérés a két modellel számított eredmény között 4%, ami gyakorlati szempontból elfogadható. Az ehhez szükséges elemszám 3D modell esetében 17048, 1D modell esetében 22. Ezek csomópontjainak száma 33146 és 45. (Érdemes megjegyezni, hogy az első, automatikus 3D hálózás esetében 1139 elemű (2220 csomópont) modellel a számított redukált feszültség 21,31MPa, ami 22% hibát jelent a számításban.)

A rúdmodell egyik hátránya, hogy csak középvonalában terhelt tartókra használható külön modellezés nélkül, ami a gyakorlatban a legtöbb esetben igaz, mert a tartókat igyekszünk a középvonalban terhelni, ettől eltérő esetben többlet igénybevételek keletkeznek. Viszont vannak esetek, amikor hiába terheljük a középvonalában a tartót, mégis többletterhelés keletkezik. A következő példán egy vékony falú U szelvényű gerenda terhelését mutatjuk be, amelynek nyírási középpontja nem a keresztmetszet súlypontjában van, így súlypontban terhelve gátolt csavarást is szenved.



2.7. ábra: U-tartó 1D, 2D és 3D modellje



2.8. ábra: U-tartó 1D, 2D és 3D modelljével számított feszültségek

Láthatjuk, hogy 1D modell nem minden igénybevételt vett számításba, míg a 2D és 3D modellek igen. Vékony falú tartók esetében a 2D héjmodellek alkalmazása nagyon hasznos, esetünkben teljes értékű modellként leírta ugyanazt az állapotot, mint a testmodell. A 2D modell 1137 csomópontból és 1042 elemből álló modellje 1,41s, a 3D modell 3780 csomópontból és 27468 elemből álló modellje 8,77s számítási időt igényelt.

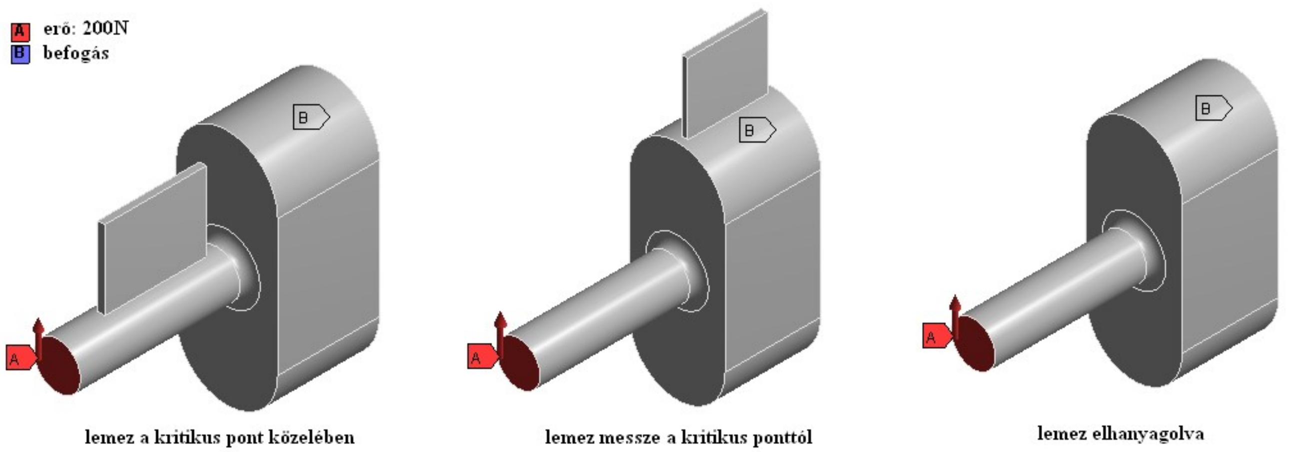
A következő táblázatban összefoglaljuk néhány főbb egyszerűsítés előnyeit és hátrányait.

Egyszerűsítés típusa	Előny	Hátrány
Szimmetria kihasználása	Fele vagy negyede számítási igény Teljes értékű modell, nincs elhanyagolás Stabilizálja a modellt (pl. súrlódás modellezésekor)	Csak szimmetrikus geometria és terhelés esetében alkalmazható
1D modell alkalmazása	Nagyon gyors rajzolás Könnyű és gyors módosítások Nagyon kis számítási igény Nagy szerkezetekre alkalmas	Csatlakozásokat nem modellezi Sarkokat nem modellezi Nehézkes modellezés excentrikus terhelés esetén Speciális geometriai modellt igényel (nem alkalmazható kész 3D modell)
2D modell alkalmazása	Közepes számítási igény Nagy szerkezetekre alkalmas	Speciális geometriai modellt igényel (nem alkalmazható kész3D modell) Állandó falvastagságot modellez
3D modell alkalmazása	Valós geometriát modellez Minden igénybevétel és hatás modellezhető	Nehézkes bármilyen geometriai jellemző megváltoztatása (új rajz szükséges) Nagy számítási igény Nagy szerkezetekre nem vagy korlátozottan alkalmas

2.1.3. Elhanyagolások és következményeik

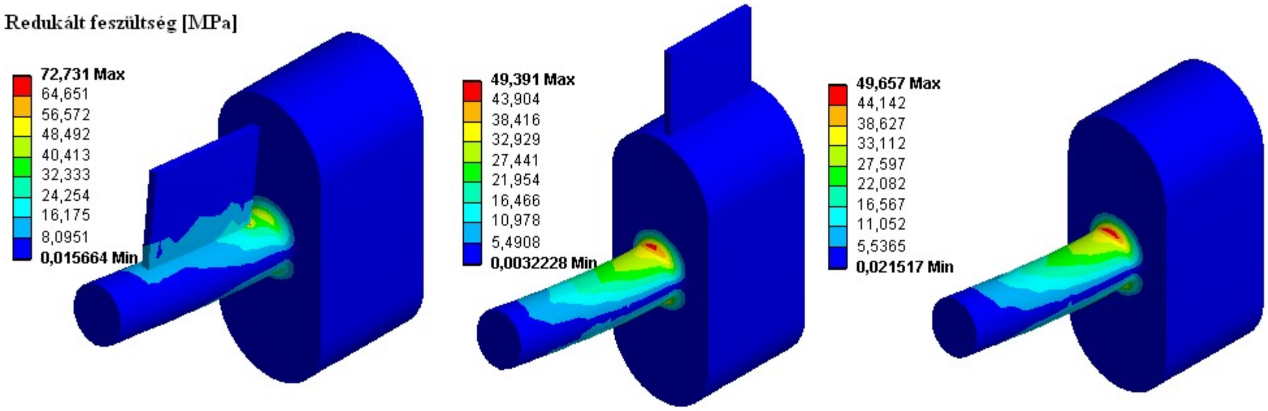
Az elhanyagolások általában a modellezési eljárás fontos részét képezik. Ebben a fejezetben az ennek szűkebb alkalmazását, a valós test bizonyos elemeinek teljes elhagyását, annak lehetőségeit, következményeit vizsgáljuk. Ha el akarunk hagyni bizonyos részeket a modellből, alapvető, hogy nem lehet teherviselő elem. Nagyon alaposan meg kell vizsgálni, hogy valóban terheletlen elemet hagyjunk el, ellenkező esetben alul vagy túlméretezhetjük a szerkezetünket.

A következő példában az elhanyagolást és annak következményeit mutatjuk be két hasonló, de eltérő hatású elhanyagolással.



2.9. ábra: 30mm széles, 2mm vastag lemez elhanyagolása

A 2.9. ábrán ugyanannak a 30 x 2mm méretű lemeznek az elhanyagolását mutatjuk be. Az első esetben a kisebb átmérőjű csapon van a lemez, a második esetben nagy vastagságú alaptesten. Mindkét esetben ugyanolyan többletszámítási igénye van a lemeznek. Ha elhanyagoljuk lemezt, mondhatjuk azt, hogy mivel a lemez erősítésként volt jelen, így annak elhagyása feszültségnövekedést okoz, az első esetben nagyobb, míg a második esetben kisebb mértékben. Azonban az első esetben egy másik hatással is számolnunk kell. Mivel a lemez a kis átmérőjű csap merevségét jelentősen megnöveli, így az alaptest és a lemezzel merevített csap közötti gyengébb keresztmetszetben feszültséggyűjtő hely jön létre. Ennek hatására a lemez elhanyagolása várhatóan nem feszültségnövekedést, hanem feszültségcsökkenést fog okozni. Általában is elmondható, hogy nem érdemes elhanyagolást tenni a kritikus keresztmetszet közelében, mert előre nem látható következményei is lehetnek, mint esetünkben a 2.10. ábrán látható hatás. A második esetben a merev alaptesten van a lemez és a kritikus keresztmetszettől távol. Ebben az esetben a kritikus feszültségre várhatóan minimális hatást fog gyakorolni az elhanyagolás.



2.10. ábra: 30mm széles, 2mm vastag lemez elhanyagolása melletti feszültségek

A 2.10. ábrán látható, hogy az első esetben nem szabad, míg a második esetben elhanyagolhatjuk a lemezt.

Összefoglalásként annyit lehet mondani az elhanyagolásokról, hogy nagyon sokszor kell és érdemes használni, de tisztában kell lennünk az elhanyagolás hatásával, hogy az eredményünk megfelelően pontos maradjon. Gyakori elhanyagolások: külső sarok lekerekítése, letörése, hegesztés, csavarozás, érintkezési feszültség, képlékeny alakváltozás, csapágyak alkatrészei, súrlódás... Ezek egy részét elhanyagoljuk, másik részét valamilyen egyszerűbb modellel vesszük figyelembe, nagyon sokszor elkerülhetetlen az elhanyagolás, pl. nagyobb méretű testeknél, sok elemből álló szerkezeteknél. Ilyen esetekben az eredeti geometria megtartásával a hálózáskor futunk bele problémákba, és ha az elemek méretét a pontos eredményhez szükséges mértékben lecsökkentjük, akkor olyan nagy lesz a modell, hogy nem tudjuk (vagy elfogadhatatlanul hosszú ideig tartana) a számításokat lefuttatni.

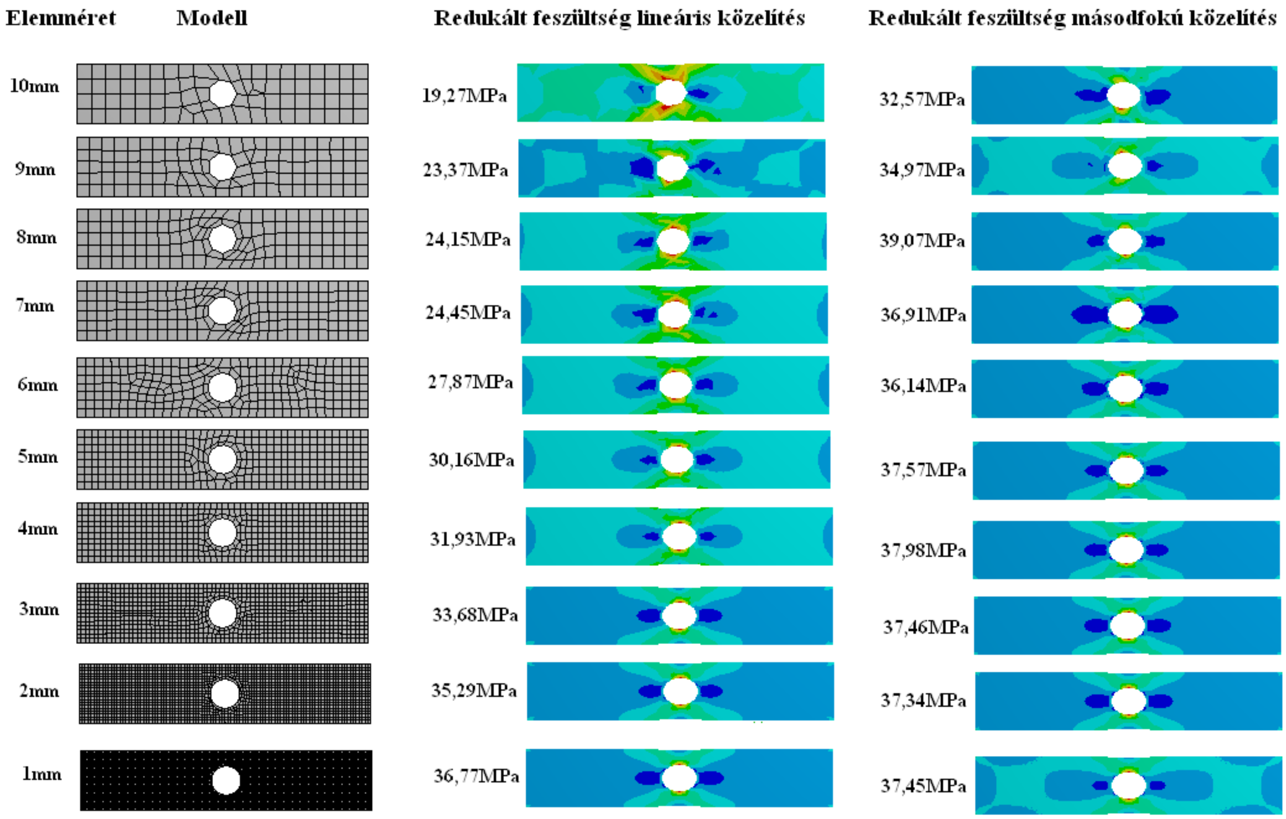
2.2. Mechanikai modellezés

2.2.1. Hálózási kérdések

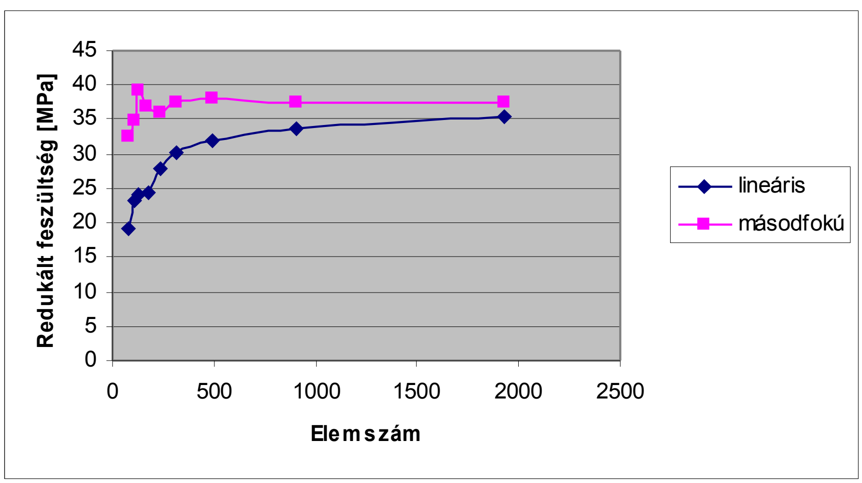
A végeselem-modellel egy valós probléma közelítő megoldását tudjuk kiszámítani, az eredményünk mindig közelítő eredmény. Kulcsfontosságú lépése a modellezésnek az elemekre bontás, azaz a hálózás, ezen múlik, hogy az eredmények mennyire lesznek pontosak, de alapvetően a háló határozza meg a számítási igényt is. Sajnos ez a két fontos szempont egymással ellentétes követelményeket jelent. Minél kisebb az elemméret, annál pontosabb lesz a számítás, de annál nagyobb a számítási igény. Nem növelhetjük tehát tetszés szerint a pontosságot, mert előbb-utóbb elérjük a számítási kapacitásunk határát. (Nemlineáris problémák esetében ez elég hamar bekövetkezik.) Meg kell tudnunk ítélni, hogy mi az a megfelelő elemméret, ami mellett az adott problémának kellő pontosságú megoldását kapjuk. Két úton növelhetjük a pontosságot, az egyik a már említett elemméret csökkentés (*h*-típusú közelítés) , de van egy másik lehetőség is, az elemen belüli közelítő polinomok fokszámának (*p*-típusú közelítés) növelése (ez nem túl gyakori, kevés kereskedelmi szoftverben van rá lehetőség, legtöbbször első vagy másodfokú közelítő függvényt választhatunk).

Egy végeselemes modellen nem lehet előre megállapítani, hogy mi a megfelelő elemméret. Természetesen gyakorlattal azért meg lehet állapítani egy hálóról, hogy megfelelő lesz-e, de egy eredményből akkor sem lehet kétséget kizáróan megmondani, hogy az jó-e. Ahhoz, hogy megbizonyosodjunk egy modell helyességéről, újabb modell kell, amivel összehasonlíthatjuk. Az eredmények hibája az alkalmazott elemméret csökkenésével csökken. Ha állandó elemméretet alkalmazunk, akkor azt mondhatjuk, hogy az elemszám növekedésével az eredményünk egyre közelebb kerül az egzakt megoldáshoz, azaz konvergál. Sajnos a konvergencia nem minden pontban monoton, azaz a teljes testen összességében csökken a hiba, de egyes pontokban nem feltétlenül folyamatos a csökkenés, van olyan eset, amikor a kérdéses eredményünk ugyan egyre közelebb van a megoldáshoz, de a számított érték alatta és felette is lehet.

A következő példán két oldalról húzott lemez modelljén mutatjuk be az elemméret hatását az eredményekre lineáris és másodfokú közelítés esetében. A lemez síkfeszültségi állapotban van, így 2D modellt alkalmaztunk. Háromdimenziós modell esetében értelemszerűen az elemszám növekedése az elemméret csökkenésével sokkal nagyobb mértékű.



2.11. ábra: Húzott lemez különböző méretű elemekre bontva



2.12. ábra: Húzott lemezben számított maximális redukált feszültség az elemméret függvényében

2.2.2. Pontosság kérdése

H-típusú közelítéskor, azaz az elemméret csökkenésekor látható, hogy az eredményünk konvergál, határértéke a megoldás lesz. A kérdés felmerül, hogy hogyan lehet megállapítani, hogy mennyire vagyunk közel a megoldáshoz. A melléklet (M14)-es összefüggése leírja a hiba csökkenését a modell N szabadságfokának függvényében:

$$\|e\| \leq \frac{k}{N^{\beta}},$$

ahol: e a közelítés hibája, k konstans, β, a közelítő függvények fokszámától és a megoldás jellegétől függő konstans (sima függvények esetében lineáris közelítéskor $\beta = 1$, másodfokú közelítéskor $\beta = 2$). Mivel k nem ismert, így egy megoldás alapján nem tudjuk megállapítani, hogy annak mekkora a hibája. Állítsuk elő u ismeretlen megoldás közelítő u_1, u_2 értékét N_1 és N_2 szabadságfokú modellel (azonos modell esetében ezek a csomópontok számával arányosak), két, amelyek ismeretlen hibái e_1 és e_2. Ezek:

$$\|e_1\| \leq \frac{k}{N_1^{\beta}}, \tag{2.1}$$

$$\|e_2\| \leq \frac{k}{N_2^{\beta}}. \tag{2.2}$$

Helyettesítve a hiba értékét:

$\|u - u_1\| \leq \frac{k}{N_1^{\beta}}$, $\|u - u_2\| \leq \frac{k}{N_2^{\beta}}$, feltételezzük, hogy a konvergencia monoton (és az eredményeket csak ilyen esetekre alkalmazzuk), akkor:

$$u - u_1 \leq \frac{k}{N_1^{\beta}}, \tag{2.3}$$

$$u - u_2 \leq \frac{k}{N_2^{\beta}}. \tag{2.4}$$

(2.4)-ből kivonva (2.3)-t:

$u_2 - u_1 \leq k\left(\frac{1}{N_1^{\beta}} - \frac{1}{N_2^{\beta}}\right) = k\frac{N_2^{\beta} - N_1^{\beta}}{N_1^{\beta} \cdot N_2^{\beta}}$, ebből

$$\left(u_2 - u_1\right)\frac{N_1^{\beta} \cdot N_2^{\beta}}{N_2^{\beta} - N_1^{\beta}} \leq k$$, ezt helyettesítve (2.2)-be:

$$\left\|e_2\right\| \leq \left(u_2 - u_1\right)\frac{N_1^{\beta} \cdot N_2^{\beta}}{N_2^{\beta} - N_1^{\beta}}\frac{1}{N_2^{\beta}},$$

$$\left\|e_2\right\| \leq \left(u_2 - u_1\right)\frac{N_1^{\beta}}{N_2^{\beta} - N_1^{\beta}}. \tag{2.5}$$

Ha két különböző szabadságfokú modellel kiszámítunk két közelítő eredményt, akkor a (2.5) segítségével megbecsülhetjük annak hibáját, amely a két eredmény különbségéből számítható.

Nézzük meg, hogy ezt a gyakorlatban hogyan alkalmazhatjuk! Ha feltételezzük, hogy egy modell szabadságfoka az elemmérettel fordítottan arányos, akkor az elemméret megfelezésével a szabadságfokot megkétszerezzeük, azaz $N_2 = 2N_1$. (Természetesen ez dimenziótól is függ, de ezt az egyszerűsítést a könnyebb alkalmazhatóság érdekében alkalmazzuk.) Így a (2.5) szerint a hiba:

$$\left\|e_2\right\| \leq \left(u_2 - u_1\right)\frac{N_1^{\beta}}{2^{\beta} N_1^{\beta} - N_1^{\beta}} = \left(u_2 - u_1\right)\frac{1}{2^{\beta} - 1}.$$

Ha lineáris közelítést alkalmazunk, és a függvények simák, akkor $\beta = 1$, így

$$\left\|e_2\right\| \leq \left(u_2 - u_1\right)\frac{1}{2^{1} - 1} = \left(u_2 - u_1\right). \tag{2.6}$$

Azaz **<u>lineáris közelítéskor az elemméret megfelezésével kapott eredmény hibája legfeljebb akkora, mint a korábbi eredménytől való eltérése</u>**. Természetesen a korábbi megkötések (monoton konvergencia, sima függvények) esetében alkalmazhatjuk ezt a megállapítást az elmouzdulásokra.
Ha másodfokú közelítést alkalmazunk, és a függvények simák, akkor $\beta = 2$, így

$$\left\|e_2\right\| \leq \left(u_2 - u_1\right)\frac{1}{2^{2} - 1} = \frac{\left(u_2 - u_1\right)}{3}. \tag{2.7}$$

Azaz **<u>másodfokú közelítéskor az elemméret megfelezésével kapott eredmény hibája legfeljebb akkora, mint a korábbi eredménytől való eltérés harmada</u>**. Természetesen a korábbi megkötések itt is érvényesek.

Az eredmény elmozdulásokra érvényes, de vizsgáljuk meg más eredményekre (pl. feszültségekre), hogy megfelelő támpontot ad-e azok megítélésére. Vizsgáljuk meg, hogy a 2.11. és 2.12. ábrán bemutatott eredmények esetében érvényes-e a megállapítás! Az eredmények értékeit a következő táblázatban foglaltuk össze. Válasszuk ki a lineáris közelítés 2 és 4mm-es elemméret mellett számított értékeit. Az összes eredmény konvergenciáját megvizsgálva látható, hogy az egzakt megoldás 37,4 és 37,5MPa között van. Nézzük meg, hogy a két adott értéket megvizsgálva érvényes-e az elemméret felezésére megállapított hibabecslés!

	Lineáris közelítés			Másodfokú közelítés		
Elemméret	Max. Fesz.	Elemszám	Csomópont	Max. Fesz.	Elemszám	Csomópont
1mm	36,77MPa	7710	7981	37,45 MPa	7710	23672
2mm	35,41 MPa	1927	2062	37,34 MPa	1928	6052
3mm	33,68 MPa	901	992	37,46 MPa	901	2885
4mm	31,93 MPa	488	556	37,98 MPa	488	1600
5mm	30,16 MPa	312	366	37,57 MPa	312	1044
6mm	27,87 MPa	239	285	36,14 MPa	239	809
7mm	24,45 MPa	177	216	36,91 MPa	171	591
8mm	24,15 MPa	130	164	39,07 MPa	125	439
9mm	23,37 MPa	113	143	34,97 MPa	112	396
10mm	19,27 MPa	80	107	32,57 MPa	81	295

A hibabecslésre felírjuk a (2.6) összefüggést:

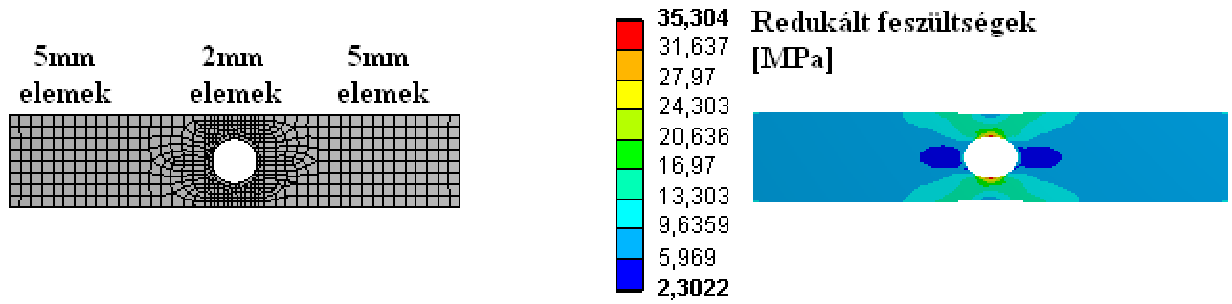
$\|e_2\| \leq (u_2 - u_1) = 35{,}41MPa - 31{,}93MPa = 3{,}48MPa$, azaz a 35,41MPa hibája legfeljebb 3,48MPa, azaz 9,8%-os hibán belül van az eredmény. Ez általában nem elegendő a műszaki gyakorlatban, ezért újra megfelezzeük az elemméretet, ami így 1mm lesz. Ezt a 2mm-es elemmérettel összehasonlítva a hiba maximuma:

$\|e_2\| \leq (u_2 - u_1) = 36{,}77MPa - 35{,}41MPa = 1{,}36MPa$, a 36,77MPa hibája legfeljebb 1,36MPa, azaz 4%. Ezt a műszaki gyakorlatban általában elfogadjuk, de ha további pontosítást szeretnénk, az elemméretet tovább felezhetjük. (A 37,4-37,5MPa közötti egzakt megoldáshoz képesti eltérést mindkét esetben jól becsültük.)

A másodfokú közelítés esetére az adott feladatra elvileg nem használhatjuk az eljárást, mert a 2.12. ábrán láthatjuk, hogy az nem monoton konvergál, ami feltételünk volt, de ennek ellenére ha megvizsgáljuk, akkor még így is elfogadható közelítést ad.

Az elemméretet ritkán csökkentjük az egész modellen, mert az elemméret csökkentése növeli a számítási igényt és általában csak a kritikus helyen vagy helyeken van szükségünk pontos eredményre. A feszültségek számításakor például kevésbé érdekes, hogy egy 120MPa megengedett feszültségű anyagból készült alkatrész alacsony terhelésű részén 1 vagy 2 MPa egy adott pontban a feszültség értéke, mert bár ez 100%-os relatív hibát jelent, a gyakorlat számára nem lényeges kérdés, ellenben az,

hogy a kritikus pontban 110MPa vagy 130MPa, az nagyon is lényeges. A helyi feszültségcsúcsok pontos számítására helyi hálósűrítést alkalmazhatunk, és az eredményeink csak elhanyagolható mértékben fognak eltérni az állandó elemméretű modellhez képest.
Vizsgáljuk meg, hogy az előző példa esetében mi történik, ha kétféle elemméretet alkalmazunk! Kiválasztunk két elemméretet, 5mm-t és 2mm-t. Állandó elemméret mellett (lineáris közelítés) 30,16 MPa és 35,41 MPa legnagyobb redukált feszültséget számítottunk. Úgy hálózzuk be a modellt, hogy a feszültségcsúcs közelében 2mm, a többi részen 5mm legyen az átlagos elemméret.



2.13. ábra: Változó elemméret hatása

A 2.13. ábrán látható, hogy a feszültségcsúcs számításakor az ottani elemméret számít, mert az eredményünk 35,3MPa, ami az 5mm-es elemmérettel számítotttól 15%-kal, a 2mm-es elemmérettel számított eredménytől 0,3%-kal tér el, gyakorlatilag azzal egyezik.

Összegezve elmondhatjuk, hogy a végeselem-modellt legalább két elemmérettel el kell készítenünk, hogy meg tudjuk állapítani annak hibáját, viszont elegendő az elemméretet csökkenteni a kritikus részek környezetében.

Az eredményeinknek nem mond ellent, de érdemes megjegyeznünk, hogy a konvergencia szinguláris helyeken nem így viselkedik. (pl. éles saroknál) A szingularitások általában a modellezés következményei, a valóságban nem fordul elő valódi szingularitás. (pl. az éles saroknak a valóságban nem zérus a sugara)

2.2.3. Kapcsolatok modellezése és következményei

Ha több testből álló szerkezetet modellezünk, akkor az egyes testek között a valóságban is kapcsolatok vannak, amelyeket modelleznünk kell. A valóságban a testek érintkező felületei mindig súrlódásos kapcsolatban vannak. Azonban ennek modellezése nagyon komoly problémákat jelent, mert a súrlódás nem lineáris, és a kis elmozdulások módszerét sem alkalmazhatjuk ebben az esetben. Ez a modellezésben is többlet munkát igényel és a számítási igényt is sokszorosára növeli. Ha az eredmények szempontjából nem lényeges a súrlódás, akkor általában valamilyen egyszerűbb módon kezeljük. Ha a testek egymáshoz képest nem mozognak, mert csavarozott, szegecselt, ragasztott, … kötés van köztük, akkor a súrlódást sokszor elhanyagoljuk és a ragasztásos kapcsolati modellt alkalmazzuk. Azzal tisztában kell lennünk, hogy ekkor a kötést és annak környezetét nem jól modellezzük, és a valóságosnál sokszor jóval kisebb feszültségeket fogunk számítani.

2.3. Anyagmodellek

2.3.1. Lineáris anyagmodell és korlátai

Az elmozdulásmezőn alapuló végeselem-módszer legegyszerűbb esetben is használ anyagmodellt. A legegyszerűbb a lineárisan rugalmas, homogén izotróp anyagmodell, amelyet a Hooke-törvény ír le:

$\underline{\underline{\sigma}} = 2G\left(\underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_1 \underline{\underline{E}}\right)$, ahol

$\underline{\underline{\sigma}}$: a feszültségtenzor mátrixa,

G : csúsztató rugalmassági modulus,

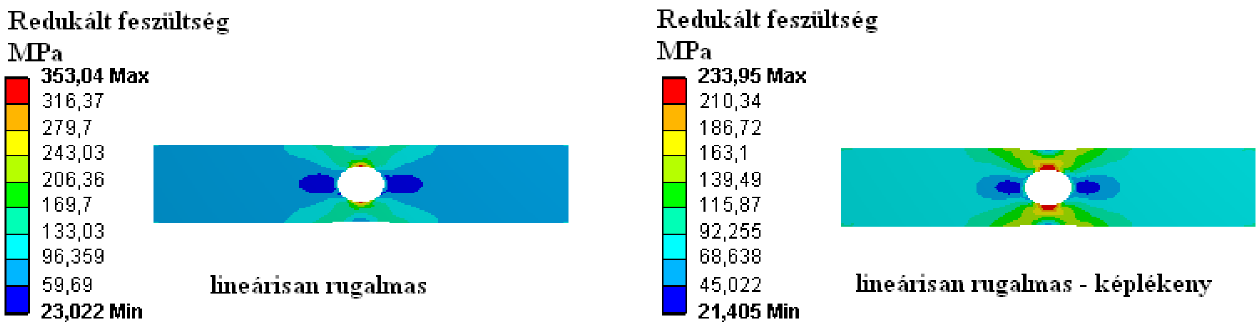
$\underline{\underline{\varepsilon}}$: alakváltozási tenzor mátrixa,

ν : Poisson-tényező,

ε_1 : alakváltozási tenzor első skalár invariánsa,

$\underline{\underline{E}}$: egységmátrix.

Ez az egyenlet a legegyszerűbb anyagegyenlet, így a legelterjedtebb is. Nagyon sok esetben alkalmazható, mert a szerkezeti anyagok nagy része rugalmas, vagy van rugalmas (rugalmasan közelíthető) szakasza. Az ilyen anyagokkal általában úgy is tervezünk, hogy bennük feszültségek rugalmas tartományban maradjanak használat közben. Azonban előfordulhat, hogy bizonyos helyeken a képlékeny tartományba esnek az eredményeink. Ennek következtében a valóságosnál nagyobb feszültségeket számítunk, amelyet figyelembe kell vennünk az eredmény kiértékelésekor, amelyet részletesen a 4. fejezetben tárgyalunk.



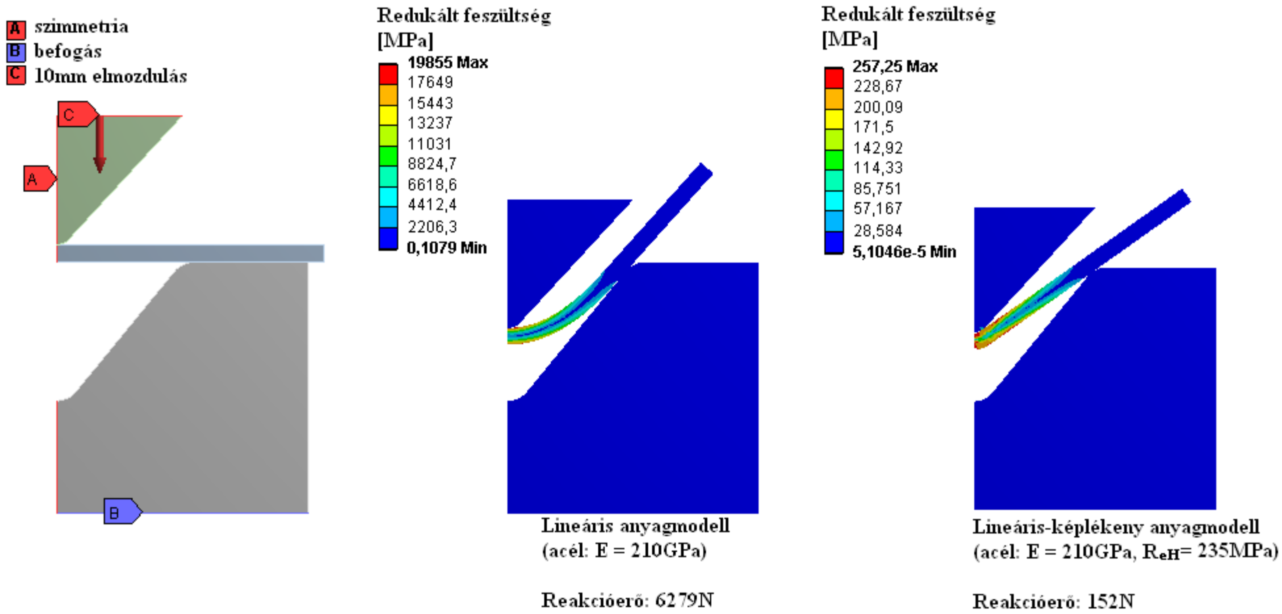
2.14. ábra: Rugalmas és képlékeny anyagmodell alkalmazása

A 2.14. ábrán ugyanazt a modellt olyan peremfeltételekkel vizsgáljuk, amelyek a 235MPa folyáshatárnál magasabb feszültségeket eredményeznek számításkor. Lineárisan rugalmas anyagmodellel 353MPa redukált feszültséget számolunk. Ha megvizsgáljuk ugyanezen peremfetételek mellett a valós 235MPa folyáshatárt leíró anyagmodellel az eredményeket, akkor láthatjuk, hogy nagyon nagy hibával számolunk, a tisztán lineáris anyagmodellel.

2.3.2. Nemlineáris alkalmazások. Mikor szükségesek a nemlineáris alkalmazások?

Nemlineáris anyag viselkedésének pontos leírásához természetesen nemlineáris modellezést kell alkalmaznunk, azonban más esetekben is felmerülhet a nemlineáris modellezés igénye. Az egyik leggyakoribb eset a súrlódásos kapcsolat modellezése. A súrlódást nem lehet lineárisan modellezni, így ezekben az esetekben nemlineáris modellezést kell alkalmaznunk. Ebben a fejezetben azonban az anyagi nemlinearitást vizsgáljuk. Két eltérő alapesetet meg kell különböztetnünk. Az egyik, amikor az anyag viselkedése ugyan nem lineáris, de rugalmas. A másik, amikor az anyag nem rugalmas. Ezeknek többféle, részleteiben különböző speciális esetei vannak, de a két viselkedés hatása alapvetően különbözik. Ha az anyag rugalmas, de nem lineáris, azt lineárisan rugalmas modellel sok esetben jól helyettesíthetjük, legfeljebb a modellünk nem lesz teljesen pontos, de komoly hibát nem vétünk, ha a rugalmassági modulust jó közelítéssel választjuk meg. Ha azonban az anyag képlékeny viselkedését nem modellezzük, akkor nagyon nagy eltérések lesznek a valóság és a modellünk eredményei között. (2.14. ábra) Ezt az eltérés kétféle módon kezelhetjük, elfogadjuk (elhanyagoljuk) vagy nem fogadjuk el. Az eltérést el lehet fogadni, ha az lokális és nincs szerkezeti hatása (a 3. fejezetben erről is lesz szó). El is lehet hanyagolni, ha alárendelt alkatrészről van szó, pl. egy csavaralátét rendszerint szenved képlékeny alakváltozást, de felesleges lenne a modellben ezzel foglalkozni és időt, energiát fektetni ennek számítására. Nem hanyagolhatjuk el, ha a szerkezetre is hatással van a képlékeny alakváltozás. Két példát mutatunk be képlékenység modellezésére, mindkét esetben elkerülhetetlen a nemlináris modell használata.

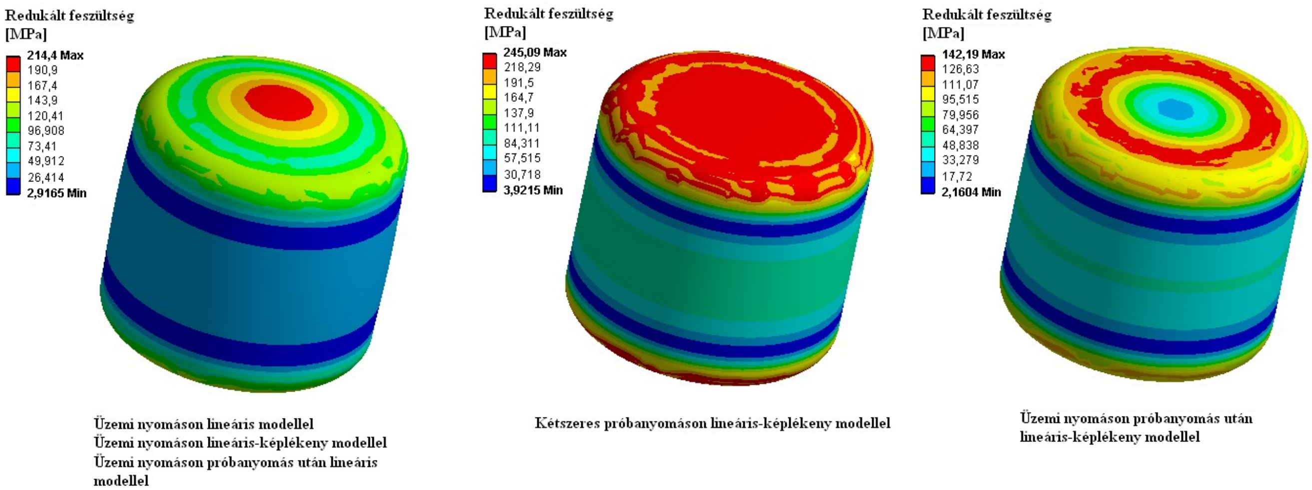
Az első példa egy lemez élhajlítása, itt értelemszerűen ha nem vesszük figyelembe a képlékenységet, akkor a valóságtól teljesen különböző, bármilyen következtetés levonására alkalmatlan eredményt kapunk.



2.15. ábra: Rugalmas és képlékeny anyagmodell alkalmazása

A 2.15. ábrán egy 10mm széles és 2mm vastag acéllemez hajlításának modelljét mutatjuk be, alkalmazva a 2.1.1. fejezetben bemutatott szimmetrikus modellezést. A példában bár csak kis helyen, de szerkezetileg fontos részen átlépjük a folyáshatárt, így a lineáris modell teljesen alkalmatlan a probléma leírására. A számított feszültség és reakcióerő is nagyságrendekkel tért el a jó modellel számított eredménytől.

A 2.16. ábrán egy nyomástartó edény eredményeit láthatjuk lineáris és nemlineáris anyagmodell esetében. Mindkét modellt két terhelési esetben vizsgálunk. Az első üzemi nyomáson, ahol mindkét modell a folyáshatár alatti 214MPa feszültséget mutatott. Ez várható is volt, mert a 235MPa folyáshatár alatt a lineárisan rugalmas-képlékeny modell lineárisan viselkedik. Azonban, ha figyelembe vesszük, hogy a használat előtt nyomáspróbának vetik alá az edényt, akkor a valós üzemi körülmények megváltoznak. A lineáris modell esetében nem, mert a nyomáspróba (példánkban duplája az üzemi nyomásnak) után visszacsökken a 214MPa feszültségre, nem számít, hogy előtte milyen feszütlségállapotban volt.



2.16. ábra: Rugalmas és képlékeny anyagmodell alkalmazása

A képlékeny modell azonban a próbanyomáson képlékeny alakváltozást szenvedett, így utána már nem ugyanakkora, hanem jóval kisebb, 142MPa feszültség ébred benne üzemi nyomáson.

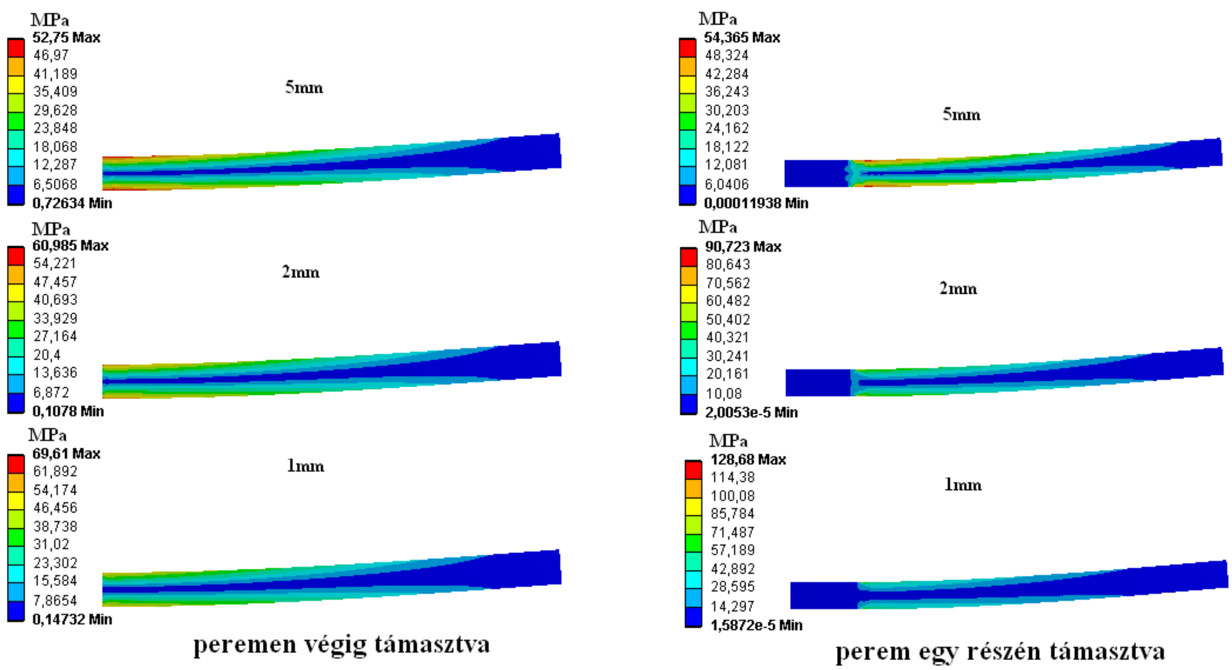
Összegezve elmondhatjuk, hogy a lineáris modell alkalmazása esetén a számítások a képlékeny tartományban általában a biztonság irányába tévednek. Azonban ez esetenként akkora mértékű lehet, amit már nem lehet elfogadni és nemlineáris modellt kell alkalmaznunk. Azt azonban figyelembe kell venni, hogy a nemlineáris modell alkalmazásával a számítási igényünk nagyságrenddel (nagyságrendekkel) nő és hamar elérheti a számítási kapacitásunk határát. A nyomástartó edény példánk esetében a lineáris modell számítási időigénye 13 másodperc, míg a képlékeny modell próbanyomáson és üzemi nyomáson végzett számítás időigénye 428 másodperc, ami több, mint harmincszoros növekedés. Amit még meg kell említeni, hogy a nemlineáris modellezés sok esetben nem ad eredményt, mert a beállításokra sokkal érzékenyebb, mint a lineáris modell. Így sok esetben a nemlineáris modellezés a hosszabb számítási idő mellett még több-kevesebb sikertelen számítást is jelent, ami további számítási idő és munkaidő ráfordítást jelent.

2.4. Peremfeltételek

Hibalehetőségek a peremfeltételek beállításakor

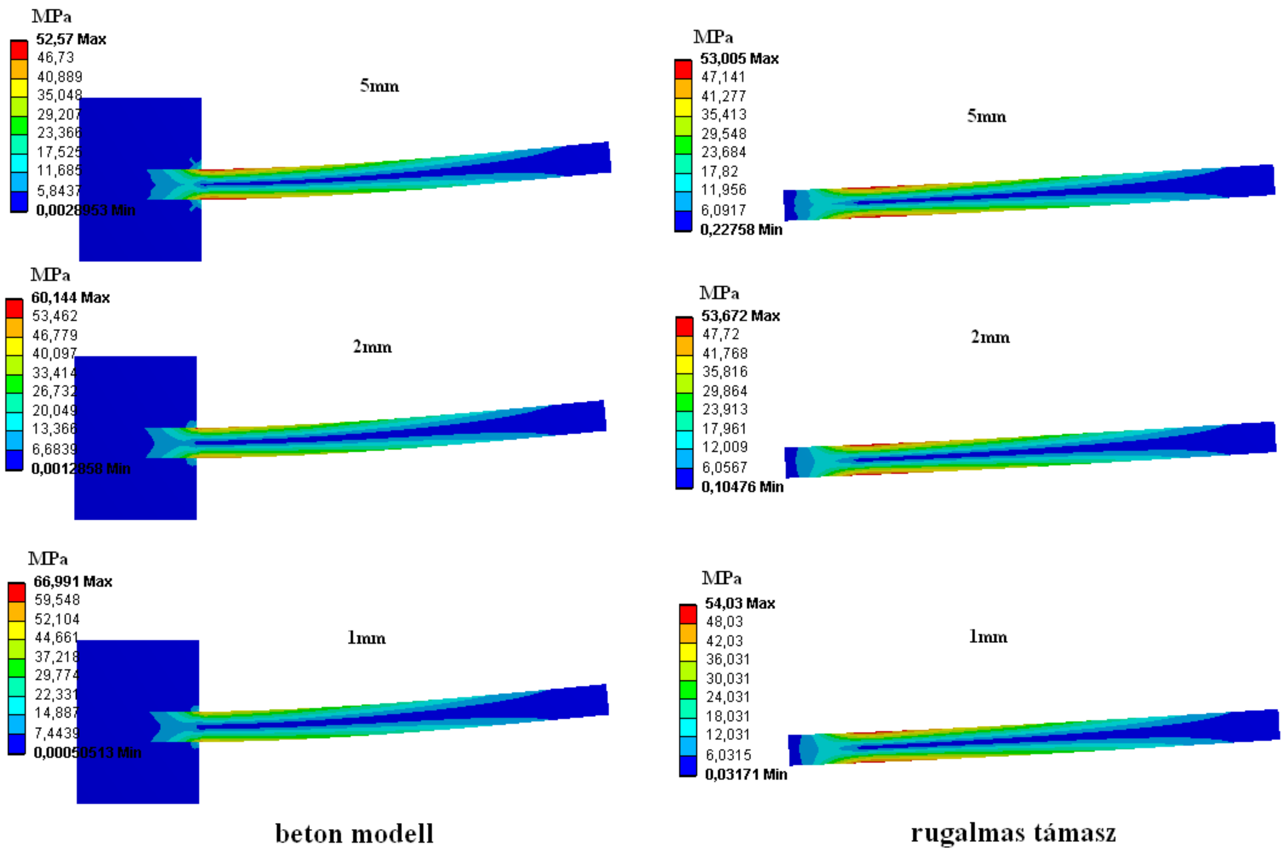
A peremfeltételek mindig elhanyagolást jelentenek, mert a valóságban a test peremén általában egy másik test van, és ennek hatását modellezzük peremfeltételekként (kivételt jelentenek a térfogati erők, pl. gravitáció). Természetesen nem lehet minden hatást a valóságos testként modellezni, mert csak akkor lesz valós javulás az eredményben, ha a kapcsolatot is modellezzük ami általában nemlineáris modellezést igényel, annak minden problémájával együtt. Természetesen itt is érvényes Saint-Venant elve, azaz az erőbevezetés helyétől távol az erőbevezetés eloszlásának módja csak elhanyagolhatóan kis mértékben módosítja a szilárdsági hatásokat. Azonban a végeselem-módszer előnyét, hogy nemcsak bizonyos pontokban, hanem a teljes testen leírja a feszültségi és alakváltozási állapotot, csak úgy tudjuk kihasználni, ha a peremfeltételek is megfelelőek.

Kényszerek esetében a legkönnyebb elkövetni azt a hibát, hogy akaratunkon kívül szingularitást hozunk létre. Ha egy test felületén előírjuk az elmozdulást, akkor az olyan hatású, mintha egy ideálisan merev testet modelleznénk. Ez kisebb hibát okoz akkor, ha a felület széléig tart a kényszer, nagyobb hibát okoz, ha a felületen belül ér véget.

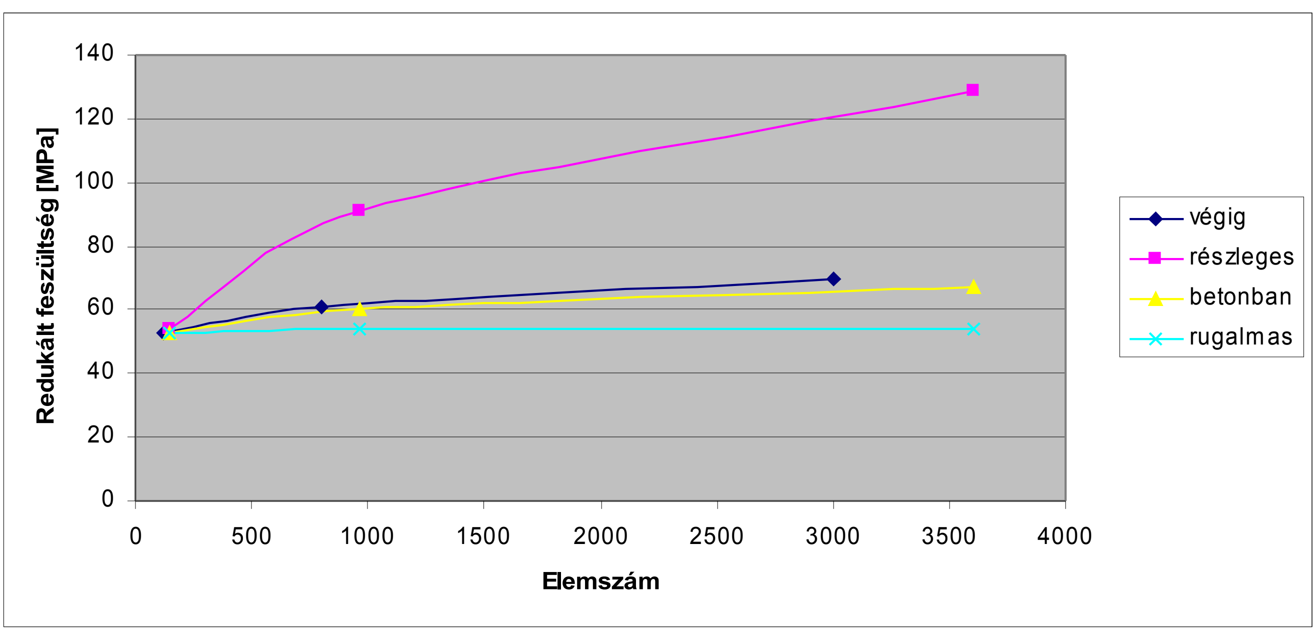


2.17. ábra: Redukált feszültségek különböző kényszerek mellett

A 2.17. és 2.18. ábrán egy befogott rúd különböző befogását különböző kényszerekkel modellezzük. Az első esetben a rúd a befogásig tart és az elmetszett keresztmetszetet fogtuk meg, ez a „peremen végig támasztva” eset. A „perem egy részén támasztva” eset ugyanez a kényszer, de a befogásnál nem vágtuk el a rudat, hanem a befogott részt is modellezve annak peremét körben fogtuk meg. A 2.18. ábrán a befogott rudat a körülötte meglévő betontömb egy részével modelleztük, de a kettő közti kényszerkapcsolat ragasztott, így ideálisan együtt mozognak. Az utolsó „rugalmas támasz” esetében szintén a teljes rudat a befogott részével együtt modelleztük, de a támasz nem ideálisan merev, hanem 30 N/mm^3 merevségű (azaz 30 N/mm^2 nyomás esetén 1mm elmozdulást enged).



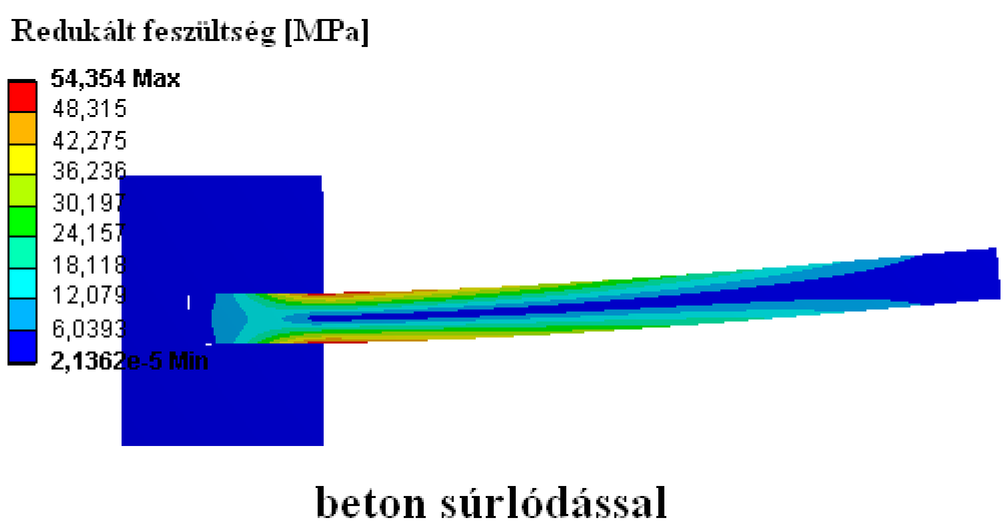
2.18. ábra: Redukált feszültségek különböző kényszerek mellett



2.19. ábra: Kényszerek hibája és az eredmény konvergenciája

Érdekes eredményt láthatunk a 2.19. ábrán, ahol a különböző kényszerek mellett számított feszültségcsúcsokat ábrázoltuk az elemszám függvényében. Láthatjuk, hogy az ideálisan rugalmas támasz már durva hálónál eléri az 53-54MPa szintet, majd nem is változik. A többi kényszer esetében is ugyanerről a szintről indul mindegyik esetben a feszütlség. Ez azt jelenti, hogy ha durva a háló, akkor feszültséggyűjtő hatást nem tudja a modell kimutatni. Ezt a hátrányát a modellnek adott esetben előnyünkre is fordíthatjuk, ha tudjuk, hogy rugalmasan fogjuk megtámasztani és nem várható feszütlséggyűjtő hatás, akkor egy előzetes gyors becslésnél (amire sokszor szükség lehet a komoly modellezés előtt) durva háló esetén bármilyen egyszerű kényszer esetében jó eredményt kapunk. Ennek az a veszélye megvan, hogy egy valóban létező feszültséggyűjtő hatást nem veszünk figyelembe, ezért ezzel nagyon körültekintően kell eljárni, és a vizsgálat végén egy jobb modellel ellenőrzni, hogy nem tévedtünk-e. Ha a betont és az elvágott peremen végig támasztott esetet összehasonlítjuk, akkor látható, hogy a kettő nagyon hasonló értékeket ad, és a konvergencia is hasonló jellegében is. Az is kiderül, hogy ha a befogást csak a felület egy részén alkalmazzuk, akkor valóban szinguláris helyet hozunk létre, ami nem konvergál.

A 2.20. ábrán a valósgot lehető legjobban modellező kényszert alkalmaztunk. A befalazást a beton modelljével modellezzük, és súrlódásos kapcsolatot definiálunk a rúd és a beton között, így nemlineárissá vált a probléma. Az előzőekben alkalmazott legfinomabb elemméretet, 1mm-t állítottunk be. Ezt összehasonlítva az előző eredményekkel megerősíthetjük, hogy a feszültséggyűjtő hatás valóban a korábbi kényszerek miatt keletkezett.



2.20. ábra: Redukált feszültségek „valós” kényszer mellett

3. Eredmények kiértékelésének módszerei és lehetőségei

3.1. Analitikus és numerikus eredmények összehasonlítása és értékelésük

A klasszikus, analitikus módszerek bizonytalanságai és sok esetben nagymértékű elhanyagolásai miatt nagy biztonsági tényezőket kellett alkalmazni. Természetesen nemcsak ez az oka a biztonsági tényezők alkalmazásának, hanem a peremfeltételek bizonytalansága, alapanyag bizonytalanság és egyéb tényezők miatt is szükség van rájuk. Azonban a számítás és modellezés bizonytalansága sokkal kisebb lett a numerikus módszerek alkalmazásával, így a biztonsági tényezőket is csökkenteni lehetett. Természetesen a numerikus modelleknek is különböző bonyolultsága és pontossága van, azonban ezt már az alkalmazásnak megfelelően mi választhatjuk meg.

A pontos modelleknek van egy olyan tulajdonsága, ami speciális kiértékelési módot igényel. Míg analitikus számításnál a tartószerkezeteket modelleztük és csak a szilárdságilag lényeges alkatrészek kritikus helyeit vizsgáltuk, addig a végeselemes modell minden benne szereplő alkatrész minden részletére egyszerre ad eredményt. Azaz utólag kell eldöntenünk, hogy melyik – esetleg a megengedett fölötti – feszültségértékeket hanyagoljuk el, és melyeket tartunk fontosnak a határérték alatt tartani. Vannak olyan gépészeti szakterületek, ahol a szabványok részletes útmutatást adnak a teher felvételéről és a kapott eredmények pontos kiértékeléséről is, azonban egyedi gépalkatrészeknél, nem szabályozott esetekben a tervezőnek (és gyártónak) kell kitalálnia a kiértékelés módját. A döntésnél figyelembe vesszük, hogy:

- Mit okoz az adott alkatrész tönkremenetele?
- Milyen sűrűn fordul elő a kritikus terhelés?
- Van-e szabvány hasonló esetre?
- Van-e terhelési próba?
- Milyen elhanyagolásokat alkalmaztunk a modellezéskor?
- Milyen pontosan ismerjük a terheléseket?
- Mennyire ismert az anyag tulajdonsága, az élettartam során fog-e változni?

Ezeknek a kérdéseknek az ismeretében kell kiértékelnünk az egyes eredményeinket.

3.2. Biztonsági tényezők kérdései

A biztonsági tényezők megállapítása a klasszikus elvek szerint történik a végeselemes eredmények kiértékelésekor is. Ha egy szabványban előírt biztonsági tényezőről van szó, akkor azt a klasszikus módon kell alkalmaznunk, azaz a veszélyes pontban számított feszültségcsúccsal hasonlítjuk össze. A pontosabb módszer sok esetben nem a biztonsági tényező csökkentését kell, hogy jelentse, hanem az egyes részek túlméretezésének mérséklését tudjuk elérni az alkalmazásával.

Ha egyéb előírás nem áll rendelkezésre, akkor általában a biztonsági tényezőt 2-re választjuk. Sok esetben azonban ennél nagyobb, akár sokszorosa is lehet a biztonsági tényező, tipikus példa erre az emelőgépek tervezése, ahol a veszélyesség miatt alkalmaznak nagy biztonsági tényezőket. Általában elmondhatjuk, hogy ha van előírás, akkor az ennél várhatóan nagyobb biztonságot ír elő.

Azonban a nyomástartó edényekre léteznek olyan szabványok, amelyek már a végeselem-módszerrel kapott eredmények speciális kiértékelésére vonatkoznak. Az ASME_VIII-1-2011 szabvány például külön előírást ad a lokális feszültségcsúcsok értékeléséhez. Ez a szabvány kis kiterjedésű, lokális feszültségek esetében az általános megengedett feszültségnél nagyobb feszültségeket is megenged, akár annak háromszorosát is (vagy a folyáshatár kétszeresét). Természetesen ezt csak lineáris modellezéskor alkalmazhatjuk, hiszen ha képlékeny anyagmodellel elérjük azt a feszültségszintet, az már a szerkezet tönkremenetelét jelenti. Lineáris esetben azonban, ha csak lokális a feszültségcsúcs, az nem okoz szerkezeti problémát, és ha figyelembe vesszük, hogy nyomástartó edényre vonatkozik, ahol van próbaterhelés, akkor a 2.3.2. fejezetben tárgyal okok miatt érthető a szabvány megengedő volta.

Összességében a biztonsági tényezők kérdésében a klasszikus módszereket alkalmazzuk, és a végeselem-módszer pontosságát ennek megfelelően kell megválasztanunk. Azt kell szem előtt tartanunk, hogy a szerkezet szilárdságilag minden várható és előírt terhelési esetnek megfeleljen.

4. MELLÉKLET

Hibabecslés h-típusú közelítéskor

[Kovács-Moharos-Oldal-Szekrényes: Végeselem-módszer, Typotex, 2011.]

A h-típusú közelítésen azt értjük, amikor a felbontás során az elemek méretét csökkentjük, a közelítő függvények fokszámát nem változtatjuk. Vizsgáljuk meg, hogyan változik egy l hosszúságú rúd esetén a hiba normája az elemméret függvényében! Osszuk fel a rudat N számú, azonos hosszúságú elemre, ekkor egy elem hossza:

$$h = \frac{l}{N}\,. \qquad \text{(M1)}$$

Az $u(x)$ egzakt elmozdulásmező közelítő megoldása $u_{VEM}(x)$ szakaszonként lineáris függvény, amelyről tudjuk, hogy az interpolációs pontokban megegyezik az egzakt megoldással.

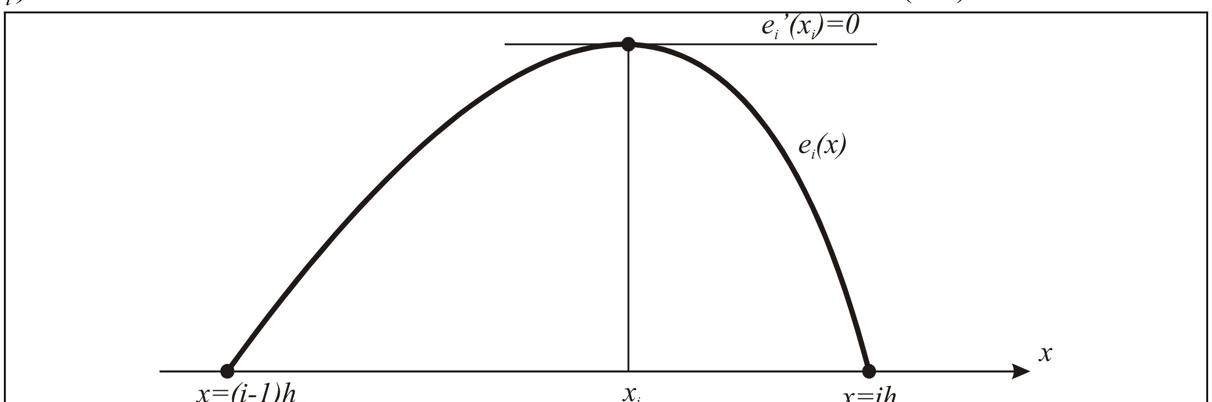
$$u(jh) = u_{VEM}(jh)\,,\ j = 0, 1, \ldots, N\,. \qquad \text{(M2)}$$

A közelítés hibája az i -edik elemen:

$$e_i(x) = u(x) - u_{VEM}(x)\,,\ x \in [(i-1)h; ih]\,,\ i = 1, 2, \ldots, N\,. \qquad \text{(M3)}$$

Ha a megoldás folytonosan deriválható, akkor a hibafüggvény is folytonosan deriválható. Az (M2) alapján az elemek határain a hiba zérus, ebből és a folytonosságból következik, hogy az elemen belül a hibafüggvénynek lesz szélsőértéke. A hiba $|e_i|$ maximum helyét x_i -vel jelöljük (M1. ábra). Ebben a pontban

$$e_i'(x_i) = 0\,. \qquad \text{(M4)}$$



M1. ábra: Hibafüggvény az i -edik elemen

$u_{VEM}(x)$ lineáris, ezért $u_{VEM}''(x) = 0$, ekkor

$$e_i'(x) = \int_{x_i}^{x} e_i''(\xi)\, d\xi = \int_{x_i}^{x} u''(\xi)\, d\xi\,,\quad x \in [(i-1)h; ih]\,.$$

Ha $|u''| \le C$, akkor

$$|e_i''(x)| \le C\,,\ x \in [(i-1)h; ih]\,, \text{ és} \qquad \text{(M5)}$$

$$\max\left(e_i'(x)\right) \le C \cdot h\,,\ x \in [(i-1)h; ih]\,. \qquad \text{(M6)}$$

Fejtsük Taylor-sorba $e_i(x)$ függvényt x_i pontban (a Lagrange-féle maradék tagot is felhasználva):

$$e_i(x) = e_i(x_i) + (x - x_i)e_i'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2} e_i''(\xi) . \qquad \text{(M7)}$$

Ha a hibafüggvény maximuma az elem második felében van,

$$ih - x_i \le \frac{h}{2} . \qquad \text{(M8)}$$

Akkor:

$$e_i(ih) = 0 = e_i(x_i) + (ih - x_i)e_i'(x_i) + \frac{(ih - x_i)^2}{2} e_i''(\xi) , \ \xi \in [x_i; ih] .$$

helyettesítve (M4) és (M5)-t:

$$0 = e_i(x_i) + (ih - x_i) \cdot 0 + \frac{(ih - x_i)^2}{2} e_i''(\xi) . \qquad \text{(M9)}$$

(M9)-ből, felhasználva (M5) és (M8)-t:

$$\max|e_i(x_i)| = \max\left|\frac{(ih - x_i)^2}{2} e_i''(\xi)\right| \le \frac{h^2}{8} C . \qquad \text{(M10)}$$

Ha a hibafüggvény maximuma az elem első felében van, akkor a Taylor-sort az $x = (i-1)h$ helyen vizsgáljuk, ahol értéke szintén zérus, így ekkor is a (M10) egyenlethez jutunk.
A rúd alakváltozási energiája:

$$U(u) = \frac{1}{2}\int_0^l \left(AE(u')^2\right)dx , \qquad \text{(M11)}$$

A hiba alakváltozási energiája:

$$U(e) = \frac{1}{2}\int_0^l \left(AE(e')^2\right)dx = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \int_{(i-1)h}^{ih} \left(AE(e_i')^2\right)dx \le \frac{1}{2} nh\left(AEC^2h^2\right),$$

figyelembe véve, hogy $nh = l$, és a konstansokat összevonva a hiba normája:

$$\|e\| = \sqrt{U(e)} \le k_1 Ch . \qquad \text{(M12)}$$

Ebben a kifejezésben a k_1 ismert konstans, a C a VEM eredményének ismeretében kis hibával becsülhető, h az elemméret. Ennek megfelelően az eredmény hibája az elemmérettel arányos. Ha a feladat megoldása előtt akarunk hibabecslést végezni, akkor az ismeretlen konstansokat összevonjuk. Ekkor a hiba maximális értéke a C ismeretlen miatt nem számítható, de az eredmény konvergenciája látható lesz. (M12) és (M1)-ből:

$$\|e\| \le \frac{k}{N} . \qquad \text{(M13)}$$

A gyakorlati példák esetében gyakran előfordul, hogy az elmozdulásfüggvény nem sima függvény. Ekkor a hiba normája és az elemszám közti összefüggés a következőképpen alakul:

$$\|e\| \le \frac{k}{N^\beta} , \qquad \text{(M14)}$$

ahol β, a közelítő függvények p fokszámától és a megoldás λ jellegétől függő konstans.

$$\beta = \frac{1}{2}\min(p, \lambda) . \qquad \text{(M15)}$$

Szigorúbb feltétel, ha nemcsak a hiba normáját, hanem a hibát a teljes tartományon vizsgáljuk. Előfordul, hogy a hiba normája monoton konvergál, de a megoldás nem monoton, ezt csak úgy lehet kiszűrni, ha nemcsak a globális, hanem a lokális hibát is vizsgáljuk.